



# XVIII CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2011



Nivel 5 (1º de Bachillerato)

Día 17 de marzo de 2011. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

**No se permite el uso de calculadoras.** Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

**Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.**

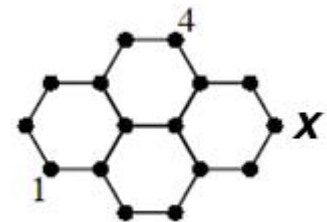
- 1** Un paso cebra tiene bandas blancas y negras alternadas, todas ellas de la misma anchura, 50 cm. El paso empieza y termina con una banda blanca. Hay 8 bandas blancas. ¿Cuál es la anchura total del paso cebra?
- A) 7 m                      B) 7,5 m                      C) 8 m                      D) 8,5 m                      E) 9 m

- 2** El área del rectángulo gris es  $13 \text{ cm}^2$  y X e Y son los puntos medios de los lados correspondientes del trapecio. ¿Cuál es el área del trapecio?
- A)  $24 \text{ cm}^2$                       B)  $25 \text{ cm}^2$                       C)  $26 \text{ cm}^2$   
D)  $27 \text{ cm}^2$                       E)  $28 \text{ cm}^2$



- 3** Si  $P = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5$ ,  $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$  y  $R = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4$ , ¿cuál de las siguientes proposiciones es correcta?
- A)  $Q < P < R$                       B)  $P < Q = R$                       C)  $P < Q < R$                       D)  $R < Q < P$                       E)  $Q = P < R$

- 4** Hay que escribir un número en cada uno de los puntos mostrados en la figura, de manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma. Como se ve, se han marcado ya dos números. ¿Qué número debe escribirse en el punto llamado X?
- A) 1    B) 3    C) 4    D) 5    E) no hay suficiente información

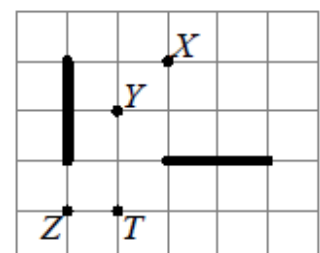


- 5** Cuando se divide 2011 por un cierto número, el resto es 1011. ¿Cuál de los números es el divisor?
- A) 100                      B) 500                      C) 1000                      D) otro número                      E) No es posible obtener ese resto

- 6** Un mosaico rectangular de área  $360 \text{ cm}^2$  está formado por baldosas cuadradas, todas del mismo tamaño. El mosaico tiene 24 cm de altura y en su anchura caben 5 baldosas. ¿Cuál es el área de cada baldosa?
- A)  $1 \text{ cm}^2$                       B)  $4 \text{ cm}^2$                       C)  $9 \text{ cm}^2$                       D)  $16 \text{ cm}^2$                       E)  $25 \text{ cm}^2$

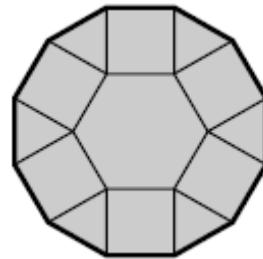
- 7** Los números de 4 cifras cuyos dígitos suman 4 se colocan en una lista en orden decreciente. ¿Qué lugar ocupa el número 2011?
- A) Sexto                      B) séptimo                      C) octavo                      D) noveno                      E) décimo

- 8** Cada uno de los segmentos marcados con trazo grueso es la imagen del otro en un cierto giro. ¿Cuál de los puntos marcados es el centro de ese giro?
- A) Solamente X    B) Solamente X y Z    C) Solamente X y T  
D) Solamente T    E) los cuatro puntos, X, Y, Z y T



- 9 La figura muestra una pieza formada por un hexágono regular de lado 1, seis triángulos y seis cuadrados: ¿Cuánto mide el perímetro (en trazo grueso) de la pieza?

- A)  $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$     B)  $6 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$     C) 12    D)  $6 + 3 \cdot \sqrt{2}$     E) 9



- 10 Tres dados se colocan uno encima de otro de manera que la suma de los puntos en las caras superpuestas es 5. Una de las caras visibles en el dado que está en contacto con la mesa tiene 1 punto. ¿Cuántos puntos tiene la cara superior del último dado?

- A) 2    B) 3    C) 4    D) 5    E) 6

**Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una**

- 11 En un determinado mes (M) hubo 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles. En el mes anterior hubo solamente 4 domingos. En el mes siguiente a M habrá, con certeza,

- A) Exactamente 4 viernes    B) exactamente 4 sábados    C) 5 domingos  
D) 5 miércoles    E) esa situación es imposible

- 12 Tres pilotos toman parte en una carrera: Michael, Fernando y Sebastián. Inmediatamente después de la salida, Michael era primero, Fernando segundo y Sebastián tercero. Durante la carrera, Michael y Fernando intercambiaron sus puestos 9 veces, Fernando y Sebastián 10 veces, y Michael y Sebastián 11 veces. ¿En qué orden terminaron la carrera?

- A) Michael, Fernando, Sebastián    B) Fernando, Sebastián, Michael    C) Sebastián, Michael, Fernando  
D) Sebastián, Fernando, Michael    E) Fernando, Michael, Sebastián

- 13 Sabiendo que  $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$ , ¿cuánto vale n?

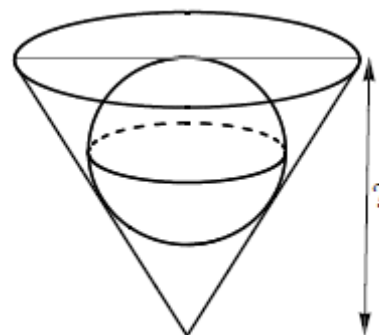
- A) 1005    B) 1006    C) 2010    D) 2011    E) ninguno de los anteriores

- 14 Matías tiene dos cubos, cuyas longitudes de sus lados son  $x$  dm y  $x + 1$  dm, respectivamente. El cubo grande está lleno de agua y el pequeño vacío. Matías llena el cubo pequeño echando agua del grande en él, dejando 217 litros en el cubo grande. ¿Cuántos litros de agua echó en el pequeño?

- A) 243    B) 512    C) 125    D) 1331    E) 729

- 15 Una esfera de radio 15 se mete en un cono, cuya generatriz es igual al diámetro de la base, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura del cono?

- A) 45    B)  $45 \cdot \sqrt{2} - 45$     C)  $45 \cdot \sqrt{2}$   
D)  $45 \cdot \sqrt{3}$     E) 50



- 16 ¿Cuántos números hay en la lista más larga posible de números consecutivos de tres cifras, cada uno de los cuales tiene al menos una cifra impar?

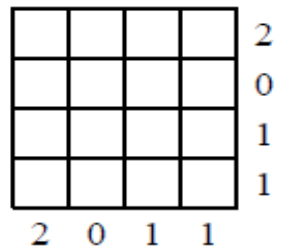
- A) 1    B) 10    C) 110    D) 111    E) 221

17

Cada casilla de la tabla 4x4 mostrada se colorea de rojo o de negro. Los números que se muestran indican el número de casillas negras de la fila o columna correspondiente.

¿De cuántas maneras se puede conseguir esta situación?

- A) 0      B) 1      C) 3      D) 5      E) 9

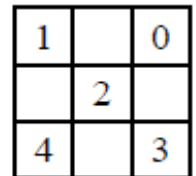


18

Se escriben enteros en cada casilla de la tabla 3x3 de la figura, de manera que la suma de números en cada cuadrado 2x2 es 10. Ya se han escrito 5 números.

¿Cuánto vale la suma de los cuatro números que faltan?

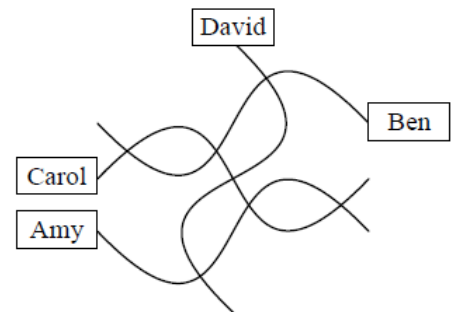
- A) 9      B) 10      C) 11      D) 12      E) 13



19

Durante una excursión en barco, bastante movida, Lali intenta dibujar un mapa de su pueblo. Consigue, con muchas fatigas, dibujar las cuatro calles, sus 7 intersecciones, y las casas de sus amigos. Sin embargo, la calle de la Flecha, la del Escudo y la del Pavo son perfectamente rectas. La cuarta calle es la calle de las Curvas. ¿Quién vive en esta última calle?

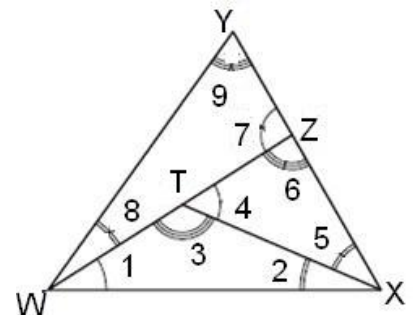
- A) Amy      B) Ben      C) Carol      D) David  
E) para poderlo decir, haría falta un mapa mejor dibujado



20

En el triángulo WXY, se elige un punto Z en el segmento XY, y luego un punto T en el segmento WZ, como se indica en la figura. Se forman así 9 ángulos denotados en la figura por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. ¿Cuál es el menor número posible de valores diferentes que pueden tomar los nueve ángulos dibujados en la figura?

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

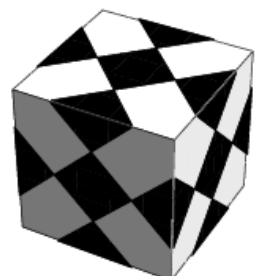


**Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una**

21

Matías tiene un cubo blanco con aristas de longitud 1 dm. Pinta en él varios cuadrados iguales negros, de manera que las caras del cubo se ven iguales? ¿Cuánto vale el área pintada de negro?

- A) 37,5 cm<sup>2</sup>      B) 150 cm<sup>2</sup>      C) 225 cm<sup>2</sup>      D) 300 cm<sup>2</sup>      E) 375 cm<sup>2</sup>



22

Un número es *majo* si tiene 5 cifras distintas y la primera (por la izquierda) es igual a la suma de las otras cuatro. ¿Cuántos números *majos* hay?

- A) 72      B) 144      C) 168      D) 216      E) 288

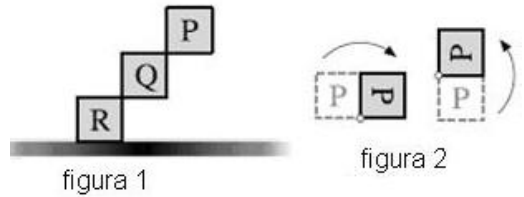
23 Los números  $x$  e  $y$  son mayores que 1. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene mayor valor?

- A)  $\frac{x}{y+1}$       B)  $\frac{x}{y-1}$       C)  $\frac{2x}{2y+1}$       D)  $\frac{2x}{2y-1}$       E)  $\frac{3x}{3y+1}$

24 Un tetraedro regular  $WXYZ$  tiene su cara  $WXY$  en el plano  $\pi$ . La arista  $XY$  está sobre la recta  $r$ . Otro tetraedro regular,  $XYZT$ , comparte una cara con  $WXYZ$ . ¿Dónde corta la recta  $ZT$  al plano  $\pi$ ?

- A) al mismo lado de  $r$  que  $W$ , dentro de la cara  $WXY$       B) al mismo lado de  $r$  que  $W$ , fuera de la cara  $WXY$   
 C) en el lado opuesto de  $r$  que  $W$       D)  $ZT$  es paralelo a  $\pi$ , así que no se cortan  
 E) la respuesta depende de las longitudes de las aristas de los dos tetraedros

25 Matías está en su ordenador, tomando parte en un juego cuya posición inicial se muestra en la figura 1. En cada movimiento, un cuadrado gira  $90^\circ$  alrededor de uno cualquiera de sus vértices. (Ver dos ejemplos de la figura 2). El objetivo del juego es colocar los tres cuadrados juntos en la parte inferior de la pantalla. ¿Cuál de las siguientes disposiciones de cuadrados puede conseguir Matías?



- A)      B)      C)      D)      E) todas las posiciones anteriores A, B, C y D

26 ¿Cuántos pares ordenados  $(x, y)$  de números naturales verifican la ecuación  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ ?

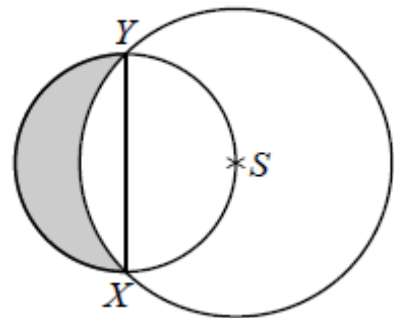
- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

27 Dado un entero  $n$ , mayor o igual que 2, designamos  $\langle n \rangle$  al mayor número primo que no es mayor que  $n$ . ¿Cuántos enteros positivos  $k$  verifican la ecuación  $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$ ?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) más de 3

28 Se dibujan dos circunferencias como se indica en la figura.  $XY$  es un diámetro del círculo pequeño y el centro  $S$  del grande está sobre la circunferencia pequeña. El radio de la circunferencia grande es  $r$ . ¿Cuánto vale el área de la región sombreada?

- A)  $\frac{\pi}{6}r^2$       B)  $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi r^2$       C)  $\frac{1}{2}r^2$       D)  $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$   
 E) otra respuesta



29 ¿Cuántos conjuntos de cuatro aristas de un cubo tienen la propiedad siguiente: **ningún par de aristas del conjunto tienen un vértice común**?

- A) 6      B) 8      C) 9      D) 12      E) 18

30 ¿Para qué valores de  $n$  entero,  $0 < n < 9$ , es posible marcar algunas casillas en una tabla  $5 \times 5$  de manera que cada cuadrado  $3 \times 3$  en ella contenga exactamente  $n$  casillas marcadas?

- A) 1      B) 1 y 2      C) 1, 2 y 3      D) 1, 2, 7 y 8      E) todos los valores de 1 a 8